АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

1966 43, № 2

УДК 523.12

А. М. ФРИДМАН

РОТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГАЗОВОГО ДИСКА

Исследуется гравитационная неустойчивость вращающегося газового диска ($p = 0$, p — давление газа) с помощью энергетического принципа. Результаты работы позволяют сделать вывод о широких классах возмущенных функций. Обнаружена неустойчивость диска относительно узколокализованных радиальных смещений.

THE ROTATIONAL INSTABILITY OF A GASEOUS DISK, by *A. M. Friedman.*— The gravitational instability of a rotating gas disk ($p = 0$, where p is the pressure of the gas) is studied by means of the energetic principle. The results permit a conclusion on wide classes of perturbation functions. Instability of the disk relative to narrow localized radial displacements is detected.

1. Для теории эволюции галактических систем представляет интерес вопрос об устойчивости плоских (вращающихся) распределений масс. Этот вопрос за последнее время исследовался многими авторами (см., например, [1—3]).

Специфическим отличием исследования устойчивости вращающегося гравитирующего диска от хорошо изученных особенностей устойчивости других тел вращения, являющихся астрономическими объектами (шара, эллипса, цилиндра [4]), изучение которых начато еще работами Ляпунова, будет нестандартная запись уравнения Пуассона. В общем случае при попытке найти собственные значения системы уравнений это приводит к весьма сложному интегро-дифференциальному уравнению. Возможность сведения исходной системы уравнений к дифференциальному связана с довольно сильным ограничением класса возмущенных функций.

Так, в работе [1] указан критерий неустойчивости вращающегося гравитирующего диска в квазиклассическом приближении, т. е. для достаточно узколокализованных смещений. Показано, что неустойчивость приводит к приобретению диском спиралевидной структуры в случае, когда смещения зависят от угла φ.

В работе [2], в которой задача устойчивости диска решалась путем нахождения собственных значений системы уравнений (1)—(4), возмущенные функции были выбраны в виде $\sim exp\,[i(kr + \omega t + m\varphi)]$, что, вообще говоря, не является обоснованным для неоднородной конечной системы.

В отличие от [1], где математически задача сводилась к нахождению собственных значений системы дифференциальных уравнений в квазиклассическом приближении, т. е. для достаточно узколокализованных смещений, и от предшествующих работ (см. обзор [3] и цитированные там работы), авторы которых, следуя Джинсу, рассматривали периодические возмущения, приводящие к распаду системы на отдельные сгущения (иначе говоря, к звездообразованию), в настоящей работе используется вариационный принцип, позволяющий сделать вывод об устойчивости диска относительно широких классов возмущенных функций. В качестве примера показана неустойчивость диска относительно радиальных смещений вида $\exp(-x^2/\Delta^2)$, вызывающая разлет вещества с края диска.

Физическим аналогом подобного рода неустойчивости диска может служить ротационная неустойчивость вращающейся шарообразной звезды, вызывающая истечение вещества с экватора [3].

2. В работе исследуется устойчивость вращающегося холодного газового диска ($p = 0$, p — давление газа). Задача об устойчивости сводится к исследованию развития во времени малых колебаний вблизи равновесного состояния. Для колебаний с малой амплитудой можно воспользоваться линеаризованными уравнениями движения. Пусть σ, v, ψ представляют собой малые отклонения плотности, скорости и потенциала от равновесных значений $\sigma^{(0)}$, $v^{(0)}$, $\psi^{(0)}$. Все переменные величины будем считать зависящими только от координаты r. Возмущение выберем в виде $A(r, t) = A(r) \exp(-i\omega t + im\varphi)$, где ω — частота раскачиваемых колебаний.

Линеаризованные уравнения гидродинамики в цилиндрических координатах в случае $m = 0$ записываются в виде *:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\ln' \sigma^{(0)} + \frac{1}{r}\right) v_r - i\omega \frac{\sigma}{\sigma^{(0)}} = 0, \tag{1}$$

$$i\omega v_r + \frac{2v_\varphi^{(0)}}{r} v_\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{2}$$

$$2\frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial r} v_r - i\omega v_\varphi = 0, \tag{3}$$

$$\psi = k\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\alpha} \frac{\sigma(r') r' \, dr' \, d\theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}}. \tag{4}$$

Здесь k — гравитационная константа, α — радиус диска. (1) — уравнение непрерывности, (2) и (3) — уравнения движения Эйлера, (4) выражает возмущенный гравитационный потенциал диска.

Исследование системы уравнений (1)—(4) мы проведем с помощью энергетического принципа.

Представим уравнения (2), (3) в виде

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2v_\varphi^{(0)}}{r}\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial t}, \tag{2a}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial t^2} = -2\frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial r}\frac{\partial \xi_r}{\partial t}. \tag{3a}$$

Здесь произведена замена $v_r = \partial\xi_r/\partial t$, $v_\varphi = \partial\xi_\varphi/\partial t$, где ξ_r, ξ_φ — произвольные смещения соответственно вдоль координат r и φ.

Сложим последние два уравнения, предварительно умножив первое из них на ξ_r, а второе на ξ_φ. Получим выражение для вариации потенциаль-

---

* Используемый ниже вариационный принцип применим при $m = 0$. При высших модах ($m \neq 0$) приводимая ниже система уравнений (1)—(4) оказывается несамосопряженной.

...ной энергии малых колебаний.

$$\delta W = -\frac{1}{2}\int\limits_{s_0}\sigma^{(0)}\left(\xi_r\frac{\partial^2\xi_r}{\partial t^2}+\xi_\varphi\frac{\partial^2\xi_\varphi}{\partial t^2}\right)ds = -\pi\int\limits_0^\alpha r\sigma^{(0)}\xi_r \times$$

$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^\alpha \frac{k\dfrac{1}{r'}\dfrac{\partial}{\partial r'}(r'\xi_{r'}\sigma_0)}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}}\,dr'\,d\theta + 4\xi_r r\frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi^{(0)}}{r}\right)\right\}dr. \quad (5)$$

При выводе формулы (5) мы воспользовались выражением (4), подставив в него значение плотности $\sigma(r')$ из уравнения (1).

Перепишем (5) в виде

$$\delta W = -\frac{1}{2}\int\limits_{s_0}F(\xi_r)\,\xi_r\,ds, \quad (5a)$$

где $F(\xi_r)$ есть сила, действующая на элемент поверхности диска в радиальном направлении. При $\delta W > 0$ направление силы противоположно направлению смещения — диск устойчив. При $\delta W < 0$ диск неустойчив.

Уравнение малых колебаний (5) можно получить из вариационного принципа $\delta\{\int L dt\} = 0$, где L есть функция Лагранжа, равная разности кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}\int\sigma^{(0)}\left(\frac{\partial\xi_r}{\partial t}\right)^2 ds \quad (6)$$

и потенциальной W. Это непосредственно вытекает из самосопряженности уравнения (5), так как после некоторых преобразований выражение (5) может быть приведено к виду, симметричному относительно ξ и η *:

$$\delta W = -\pi\int\limits_0^\alpha\left\{k\sigma^{(0)}(r)\int\limits_0^\alpha\left[\eta(r)\,\xi(r')\,\sigma^{(0)}(r')\,rr'\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial r'}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{r^2+r'-2rr'\cos\theta}}\right]+\right.$$

$$\left.+4\sigma^{(0)}(r)\,\eta(r)\,\xi(r)\frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi^{(0)}}{r}\right)\right\}dr, \quad (7)$$

где η — некое вспомогательное смещение, удовлетворяющее тем же граничным условиям, что и ξ $(\xi(\alpha) = 0)$.

Следуя экспериментальным данным, касающимся распределений плотностей и угловых скоростей масс в плоских галактических подсистемах [5—6], рассмотрим два частных случая:

$$1)\quad \sigma^{(0)}(r) = \begin{cases}\dfrac{c_1}{r} & \text{при}\quad r > \varepsilon > 0\\ \sigma^{(0)} & \text{при}\quad 0 \leqslant r \leqslant \varepsilon\end{cases}; \quad (8)$$

$$2)\quad \Omega^{(0)}(r) = \begin{cases}\dfrac{c_2}{r} & \text{при}\quad r > \varepsilon > 0\\ \Omega^{(0)} & \text{при}\quad 0 \leqslant r \leqslant \varepsilon\end{cases}, \quad (9)$$

где $\Omega^{(0)}(r)$ — угловая скорость вращения диска, $c_{1,2} = \text{const}$. Зададим смещение в виде

$$\xi_r = \exp(-\mu x^2), \quad (10)$$

* Симметрия относительно r и r' выполняется здесь автоматически.

где $\mu = 1/\Delta^2$, Δ — среднее квадратичное отклонение, $x^2 = (r - r_0)^2$. При таком выборе вида смещения наибольший вклад в выражение (5) вноси окрестность точки r_0, поэтому

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{r^2 - r'^2 - 2rr' \cos\theta}} \sim \int\limits_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{(r - r')^2 + rr'\theta}} \sim \ln \frac{2r_0^2}{(r - r')^2}. \quad (11$$

Разложение (11) справедливо при

$$r - r' \sim \Delta \ll r_0, \quad (12$$

т. е. согласно (8) в области, где $\sigma^{(0)}(r) \sim 1/r$.

Выбор смещения в виде (10) определяется сравнительной простотой вы числения интеграла (5) и способен, как и любой другой произвольный ви смещения, установить достаточный признак неустойчивости системы.

Система уравнений (1) — (4) в нулевом приближении связывает невоз мущенные значения скорости и плотности условием

$$\frac{(v_\varphi^{(0)})^2}{r} = k \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_{s_0} \frac{\sigma^{(0)}(r')\, ds'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta}}. \quad (13$$

Учитывая последнее равенство, а также (8), (10) и (11), для потенциал ной энергии системы в пренебрежении экспоненциально малыми членам получаем выражение *

$$\delta W = -K\pi\left(\frac{1}{4} \ln 2\mu r_0^2 + 4 \ln \frac{a}{r_0}\right), \quad (14$$

$K = \mathrm{const}$ размерности энергии, составленная из c_1, α, k. Используя усл вие (12), находим, что $\delta W < 0$.

В случае, когда угловая скорость вращения $\Omega^{(0)}(r)$ убывает с увел чением расстояния от центра диска (9), в пренебрежении экспоненциальн малыми членами потенциальная энергия принимает вид **

$$\delta W = -\frac{3K'\pi^{3/2}}{8\mu r_0^2}, \quad (15$$

$K' = \mathrm{const}$ размерности энергии.

По порядку величины выражение (15) много меньше аналогичного вы ражения (14), что объясняется обращением в нуль в случае $\Omega^{(0)} \sim 1/$ слагаемого, ответственного за вращение в формуле (5). Поэтому инкр

---

* Для возможности использования таблиц интегралов [7] удобно провести сл дующее преобразование:

$$\ln \frac{r_0^2}{(x - x')^2} = \ln r_0^2 - \ln (x^2 - x'^2)^2 + \ln (x + x')^2,$$

а далее воспользоваться формулой

$$\ln (x^2 - x'^2)^2 = 2 \ln (x^2 - x'^2)\theta(x^2 - x'^2) + 2 \ln (x'^2 - x^2)\,\theta(x'^2 - x^2),$$

где

$$\theta(x^2 - x'^2) = \begin{cases} 1 & \text{при } x'^2 < x^2 \\ 0 & \text{при } x'^2 > x^2 \end{cases}.$$

** Для возможности пользования таблицами интегралов [7] удобно продиффере цировать интеграл

$$\Phi(x) = \int\limits_{r_0}^{a - r_0} \ln \frac{r_0^2}{(x' - x)^2} e^{-\mu x'^2} \mu x'^2 dx'$$

по параметру x.

...мент неустойчивости, вычисляемый из формулы

$$\omega^2 = \frac{\delta W}{\int\limits_{s_0} \sigma^{(0)} \xi_r^2 \, ds}, \tag{16}$$

в случае (8) много больше, чем в случае (9), и равен:

$$\omega^2 \sim -\frac{3K_1}{4\sqrt{2}\,a} \tag{17}$$

$$K_1 = \text{const}.$$

Институт ядерной физики
Новосибирск

Поступила в редакцию
11 января 1965 г.

Литература

1. G. C. Lin, Frank H. Shu, Astron. J., 140, 647, 1964.
2. Alar Toomre, Astrophys. J., 139, 1217, 1964.
3. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Успехи физ. наук, 86, № 3, 1965.
4. Л. М. Озерной, Астрон. ж., 41, 494, 1964.
5. K. K. Kwee, C. A. Muller, G. Westerhout, Bull. Astron. Inst. Netherl., 12, 211, 1954.
6. M. Schmidt, Bull. Astron. Inst. Netherl., 13, 15, 1956.
7. С. И. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.